نام و نام خانوادگی : .....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس: **سید رضا موسوی**

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۲/۸/۲۸**

وقت : **۸۰** دقیقه

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : **ریاضیات عمومی۱**

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۳۹۳**- **۱۳۹۲**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- اگر $f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\le ۰ \\ -\dfrac{۱}{x} & x>۰ \end{cases}$ ، تابع $f\circ f$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال ۲- از سه حد داده شده ، دو حد را انتخاب کرده و محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

$$l_۱=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cos^۳ ۲x-\cos ۲x-۱}{\cos ۴x-\cos ۲x}$$

$$l_۲=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{\cos ax-\cos bx}$$

$$l_۳=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲-۲x+۴}-\sqrt{x^۲+۲x-۴}}{x^۲-۳x+۲}$$

سوال ۳ - از سه مقدار خواسته شده ، دو مقدار را انتخاب کرده و محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

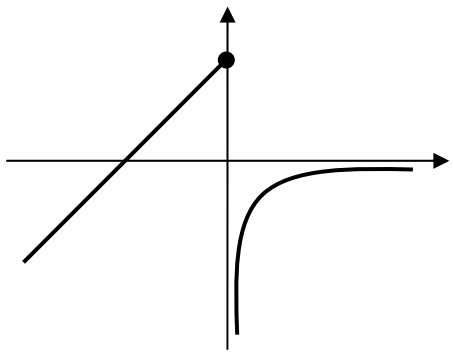
$$f(x)=\frac{۱+\sqrt{x-۱}}{۲x^۳-x+۱}\ \to\ f'(۲)=?$$

$$g(x)=۳x^۵+x^۳\ \to\ (g^{-۱})'(۴)=?$$

$$h(x)=\sin^۳(x+۱-\tan x)\ \to\ h'(\frac{\pi}{۴})=?$$

سوال ۴- معادله تمام مماسهای منحنی تابع $y=-x^۲$ را بنویسید که از نقطه $(۰,۱)$ می گذرند. **۱۵ نمره**

موفق باشید



جواب سوال۱ : داریم :
$$f\circ f(x)=\begin{cases} f(x)+۲ & f(x)\le ۰ \\ -\dfrac{۱}{f(x)} & f(x)>۰ \end{cases}$$

بنابر این باید ناحیه هایی را مشخص کنیم که در آنها $f(x)>۰$ و یا $f(x)\le ۰$.

اگر $x>۰$ آنگاه $f(x)=-\dfrac{۱}{x}$ یعنی $f(x)<۰$.

اگر $x\le ۰$ آنگاه $f(x)=x+۲$ بنابر این $\begin{cases} f(x)\le ۰ & x\le -۲ \\ f(x)>۰ & -۲<x \end{cases}$.

$$f\circ f(x)=\begin{cases} f(x)+۲ & x\le -۲ \quad ۰<x \\ -\dfrac{۱}{f(x)} & -۲<x\le ۰ \end{cases} \quad\rightarrow\quad f\circ f(x)=\begin{cases} x+۴ & x\le -۲ \\ -\dfrac{۱}{x+۲} & -۲<x\le ۰ \\ -\dfrac{۱}{x}+۲ & ۰<x \end{cases}$$

جواب سوال ۲- حد اول را به روشهای مختلف می توان حل کرد.

روش اول:
$$l_۱=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cos^۳ ۲x-\cos ۲x-۱}{\cos ۴x-\cos ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cos^۳ ۲x-\cos ۲x-۱}{۲\cos^۲ ۲x-\cos ۲x-۱}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{(۲\cos^۲ ۲x+۲\cos ۲x+۱)(\cos ۲x-۱)}{(۲\cos ۲x+۱)(\cos ۲x-۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cos^۲ ۲x+۲\cos ۲x+۱}{۲\cos ۲x+۱}=\frac{۵}{۳}$$

روش دوم :
$$l_۱=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cos^۲ ۲x-\cos ۲x-۱}{\cos ۴x-\cos ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cos^۳ ۲x-\cos ۲x-۱}{۲\cos^۲ ۲x-\cos ۲x-۱}$$

قرار می دهیم $t=\cos ۲x$ و داریم
$$l_۱=\lim_{x\to ۱}\frac{۲t^۳-t-۱}{۲t^۲-t-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(۲t^۲+۲t+۱)(t-۱)}{(۲t+۱)(t-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۲t^۲+۲t+۱}{۲t+۱}=\frac{۵}{۳}$$

روش سوم :
$$l_۱=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cos^۳ ۲x-\cos ۲x-۱}{\cos ۴x-\cos ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(\cos ۲x-۱)(۲\cos^۲ ۲x+۲\cos ۲x+۱)}{-۲\sin ۳x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin^۲ x(۲\cos^۲ ۲x+۲\cos ۲x+۱)}{-۲\sin ۳x\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{\sin ۳x}(۲\cos^۲ ۲x+۲\cos ۲x+۱)=\frac{۱}{۳}\times ۵=\frac{۵}{۳}$$

روش چهارم :
$$l_۱=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cos^۳ ۲x-\cos ۲x-۱}{\cos ۴x-\cos ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos ۲x(۲\cos^۲ ۲x-۱)-۱}{-۲\sin ۳x\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos ۲x(۱-۲\sin^۲ ۲x)-۱}{-۲\sin ۳x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to ۰}[\frac{\cos ۲x-۱}{-۲\sin ۳x\sin x}+\frac{۲\sin^۲ ۲x\cos ۲x}{-۲\sin ۳x\sin x}]=\lim_{x\to ۰}[\frac{-۲\sin^۲ x}{-۲\sin ۳x\sin x}+\frac{-۲\sin^۲ ۲x\cos ۲x}{-۲\sin ۳x\sin x}]$$
$$=\lim_{x\to ۰}[\frac{\sin x}{\sin ۳x}+\frac{\sin ۲x}{\sin ۳x}\times\frac{\sin ۲x}{\sin x}\times\cos ۲x]=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}\times ۲=\frac{۵}{۳}$$

$$l_2=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos ax-\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{-2\sin\frac{(a+b)x}{2}\sin\frac{(a-b)x}{2}}$$

$$=\frac{-1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin\frac{(a+b)x}{2}}\times\frac{\sin^2 x}{\sin\frac{(a-b)x}{2}}=\frac{-1}{2}\times\frac{2}{a+b}\times\frac{2}{a-b}=\frac{-2}{a^2-b^2}$$

$$l_3=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2+2x-4}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2+2x-4}}{x^2-3x+2}\times\frac{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2+2x-4}}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2+2x-4}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-2x+4)-(x^2+2x-4)}{x^2-3x+2}\times\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2+2x-4}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-4x+8}{(x-2)(x-1)}\times\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2+2x-4}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-4}{x-1}\times\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2+2x-4}}=\frac{-4}{1}\times\frac{1}{4}=-1$$

جواب سوال ۳-

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{x-1}}{2x^3-x+1}\to f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(2x^3-x+1)-(6x^2-1)(1+\sqrt{x-1})}{(2x^3-x+1)^2}$$

$$\to f'(2)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2-1}}(16-2+1)-(24-1)(1+\sqrt{2-1})}{(16-2+1)^2}=\frac{\frac{15}{2}-46}{15^2}\to f'(2)=\frac{-77}{450}$$

$$g(x)=3x^5+x^3\to(g^{-1})'(4)=\frac{1}{g'(g^{-1}(4))}=\frac{1}{g'(1)}\quad,\ g'(x)=15x^4+3x^2\to g'(1)=18\to(g^{-1})'(4)=\frac{1}{18}$$

$$h(x)=\sin^3(x+1-\tan x)\to h'(x)=(1-1-\tan^2 x)\times 3\cos(x+1-\tan x)\sin^2(x+1-\tan x)$$

$$h'(\frac{\pi}{4})=(-\tan^2\frac{\pi}{4})\times 3\cos(\frac{\pi}{4}+1-\tan\frac{\pi}{4})\sin^2(\frac{\pi}{4}+1-\tan\frac{\pi}{4})$$

$$h'(\frac{\pi}{4})=(-1)\times 3\cos(\frac{\pi}{4})\sin^2(\frac{\pi}{4})\to h'(\frac{\pi}{4})=-3(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\qquad\to h'(\frac{\pi}{4})=\frac{-3\sqrt{2}}{4}$$

جواب سوال ۴- اگر خطی از نقطه $(0,1)$ بگذرد معادله آن به صورت $y-1=mx$ خواهد بود. اگر این خط بر منحنی تابع $y=-x^2$ مماس باشد باید دستگاه معادله $\begin{cases}y-1=mx\\ y=-x^2\end{cases}$ جواب داشته باشد. یعنی خط و منحنی باید حداقل یک نقطه مشترک داشته باشند. از حل دستگاه داریم : $-x^2-1=mx$ یعنی $x^2+mx+1=0$ که نتیجه می دهد $x=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-4}}{2}$

اگر برای x دو مقدار وجود داشته باشد یعنی اینکه خط منحنی را در دو نقطه قطع می کند.

پس باید $\sqrt{m^2-4}=0$ یعنی $m=\pm 2$.

در نتیجه دو خط $y=2x+1$ و $y=-2x+1$ خطوط مورد نظر مساله هستند.

سیدرضا موسوی